LIMO 2007 wordt mogelijk gemaakt door:

Hoofdsponsor:

Hewitt

Deloitte.

Optiver

DERIVATIVES TRADING

Universiteit Utrecht

Universiteit Twente

de ondernemende universiteit

Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen

MATHEMATICAL RESEARCH INSTITUTE

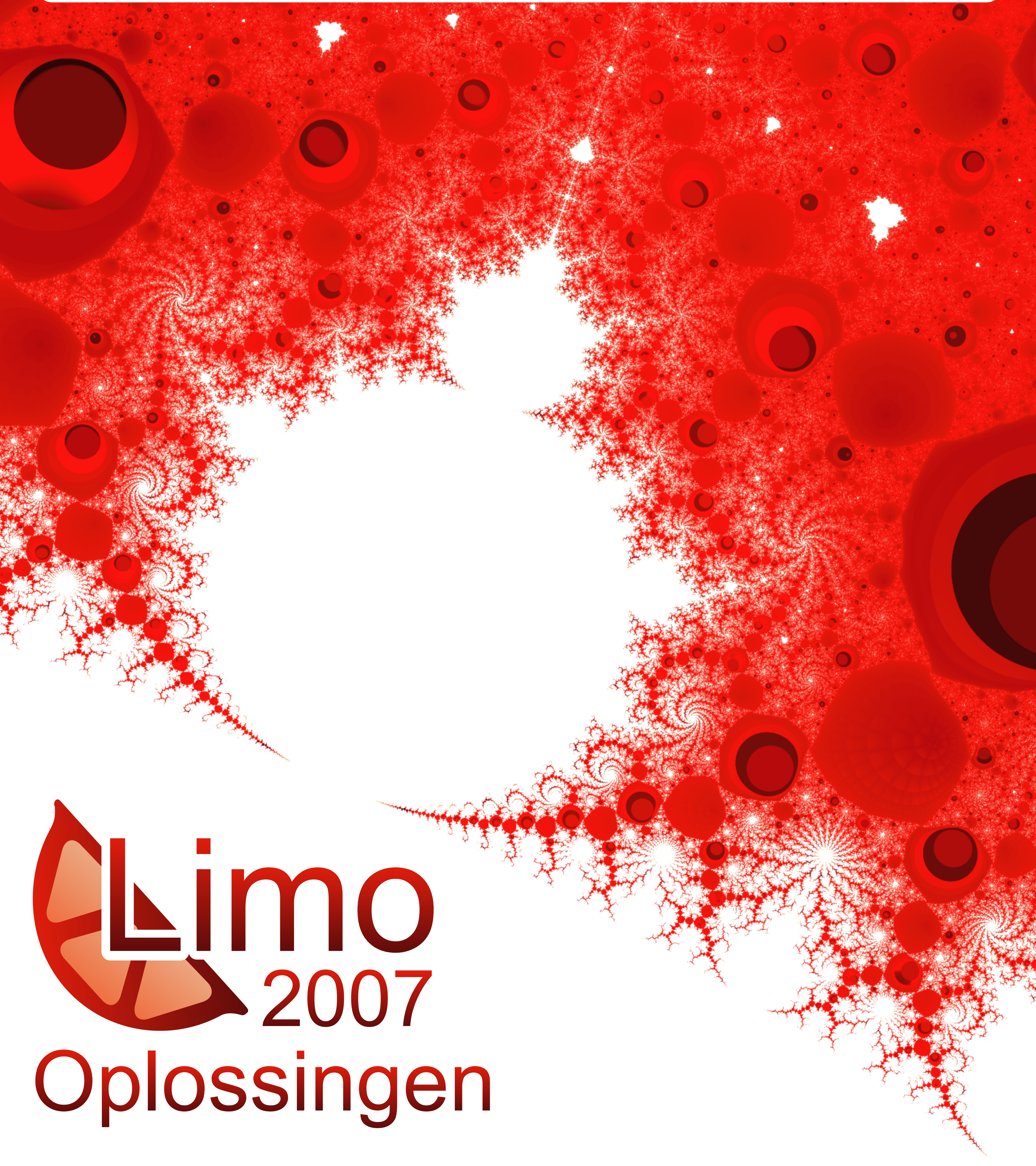
MRI

THOMAS STIELTJES INSTITUTE FOR MATHEMATICS

NWO

Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek

Exacte Wetenschappen



LIMO 2007

Oplossingen

Bèta's op zoek naar meer dan boeiend werk, helpen we goed op weg.

Hewitt Associates is een wereldwijd opererende HRM Consulting en Outsourcings-organisatie met zo'n 23.000 mensen in meer dan veertig landen. In Nederland (350 collega's) helpen we onze klanten met actuarieel advies, pensioenuitvoering en complete HRM-consultancy. We doen ons werk met passie, wat bij ons staat voor intellectuele uitdagingen, optimale kwaliteit en interessante klanten. Maar ook voor plezier in je werk, groei en een eigen koers.

We zijn een bedrijf waarvan je mag verwachten dat het weet wat mensen beweegt in hun werk en wat ze in een carrière zoeken. Daarom vind je hier geen verhaal over targets en hoe we telkens weer weten die te bereiken. De weg erheen vinden we veel belangrijker, omdat die het beste in mensen boven brengt. Bij Hewitt is dat een pad dat je in hoge mate zelf uitstippelt. En waar elke bestemming een nieuw begin is.

Ben jij afgestudeerd in een bètarichting? En heb je belangstelling voor pensioen- en actuarieel advies? Zouden jouw adviezen ook miljoenen kunnen besparen? Ambieer je werk op een hoog analytisch niveau, waarin je alle ruimte krijgt om jezelf te ontwikkelen? En ben jij pas tevreden als de klant dat is? Dan is Hewitt voor jou de juiste optie.

We zijn voortdurend op zoek naar mensen die -net als wij- voor de beste kwaliteit gaan. Die persoonlijke en professionele groei belangrijk vinden. Die eigenzinnigheid combineren met teamgeest. En die hun eigen weg kiezen. We helpen jou op het carrièrepad dat aansluit op jouw talenten en ambities en we coachen je op de weg die je zelf uitzet. Bij ons vind je ruimte voor initiatief, continue uitdagingen, een informele cultuur én mogelijkheden om werken en studeren te combineren. Bij ons mag je, sterker nog, móet je jezelf zijn. Want pas dan haal je het beste uit jezelf. Pas dan ben je in staat om je eigen koers uit te zetten.

Meer informatie over de diverse functies bij Hewitt Associates vind je op www.hewitt.nl. Een brief met CV kun je sturen naar Hewitt Associates B.V., ter attentie van Linda Willemsen, afdeling Human Resources, postbus 12079, 1100 AB Amsterdam, of per mail naar nlpz@hewitt.com.

Hewitt

Kies je eigen weg bij Hewitt

Hewitt is gevestigd in Amsterdam, Eindhoven en Rotterdam.

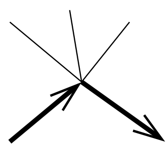
(a) We schrijven de matrix A op die bij T hoort. Voor $g = 1$ krijgen we een 2×2-matrix in de basis $\{e_1, \bar{e}_1\}$ als $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (merk op dat de unieke lus als eindpunt zijn eigen beginpunt heeft, dus die moeten we tellen; dit eindpunt is ook het beginpunt van zijn omgekeerd geörienteerde lus, maar die moeten we volgens de definitie niet tellen). Nu zie je meteen dat $I - A$ de nulmatrix is, dus is $\dim K_X = 2$ in dit geval.

Als $g \geq 2$, dan is $A - I$ in de basis $\{e_1, \ldots, e_g, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_g\}$ van de vorm $A - I = \left(\begin{smallmatrix} B & B \\ B & B \end{smallmatrix}\right)$, met B een $g \times g$ matrix met nullen op de diagonaal en 1 overal anders. Hij kan dus worden geveegd tot $A - I \sim \left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Nu doen we het volgende: de eerste kolom van alle andere kolommen in B aftrekken; dan alle rijen bij de eerste optellen; dan alle kolommen bij de eerste optellen. Het resultaat is $B \sim \operatorname{diag}(g-1, -1, \ldots, -1)$ en A is dus equivalent met een matrix die bestaat uit uitsluitend nullen, behalve op de eerste g plaatsen op de diagonaal. Hieruit volgt dat $\dim K_X = g$.

Conclusie:

$$\dim K_X = \begin{cases} 2 & \text{als } g = 1 \\ g & \text{als } g \geq 2 \end{cases}$$

(b) Stel dat e in de lus c voorkomt, en neem aan dat e' de unieke zijde in c is die volgt op e, waarbij we de eerste zijde van c beschouwen als de zijde die volgt op de laatste zijde. Dan heeft e' als beginpunt het eindpunt van e en is het volgende waar: $T(e) - e' = T(\bar{e}') - \bar{e}$, zie figuur 1.1.



Figuur 1.1: Illustratie van de vergelijking

Daarmee berekenen we:

$$\begin{aligned}
(T-1)\varphi(c) &= (T-1)\left(\sum e - \sum \bar{e}\right) \\
&= \sum T(e) - \sum e - \sum T(\bar{e}) + \sum \bar{e} \\
&= \sum T(\bar{e}') - \sum \bar{e} + \sum e' - \sum T(\bar{e}) - \sum e + \sum \bar{e} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Waaruit volgt dat inderdaad $\varphi(c) \in K_X$.

(a) Merk als eerste op dat de eis equivalent is met de conditie dat twee punten die horizontaal, verticaal of diagonaal naast elkaar liggen niet dezelfde kleur mogen hebben.

Stel dat er in een rij (of kolom) punten maar twee kleuren gebruikt worden, A en B. Aangezien twee naburige punten niet dezelfde kleur mogen hebben betekent dit dat de kleur van de punten op deze rij om en om A dan wel B is. De rij erboven kan dan geen punten bevatten die kleur A of B hebben (want elk punt in die rij ligt verticaal of diagonaal naast een punt dat kleur A heeft en een punt dat kleur B heeft). Die rij wordt dus gekleurd met alleen de andere twee kleuren C en D. Met inductie zien we dan dat alle rijen gekleurd zijn met maar twee rijen en dat in elke rij de twee kleuren van die rij om en om voorkomen. Dit betekent dat de hele kleuring invariant is onder een horizontale translatie van lengte 2.

Laten we nu een rij bekijken die drie verschillende kleuren heeft, A, B en C. Het punt dat recht boven het middelste punt ligt kan niet de kleuren A, B of C hebben, omdat het al grenst aan punten met die kleuren. Dat punt heeft dus kleur D. Dan zie we dat de punten boven en onder het eerste en derde punt de kleur C respectievelijk A moeten hebben, ofwel boven deze rij van drie punten met de kleuring ABC ontstaat een rij van drie punten met nu de kleuren CDA. Met hetzelfde argument komt daarboven weer een rijtje dat de kleuren ABC heeft en uit inductie volgt nu dat deze twee kleuringen elkaar opvolgen. In de verticale richting hebben we dan 3 kolommen gevonden waarvan de punten elk maar door twee kleuren gekleurd worden. Zoals we net gezien hebben betekent dit dat er een translatiesymmetrie van de kleuring bestaat.

Als er echter nooit 3 verschillend gekleurde punten op een rij liggen kan elke rij maar met 2 kleuren gekleurd worden, dus is er ook dan een translatiesymmetrie. Er is dus altijd een translatie te vinden die de kleuring invariant laat.

Overigens hoeft die translatiesymmetrie maar 1 richting op te staan: Bekijk maar de kleuring met 4 kleuren die (x, y) kleurt als $(x \mod 2, y \mod 2)$ als $y \geq 0$ en $(x + 1 \mod 2, y \mod 2)$ als $y < 0$.

(b) In drie of meer dimensies is er niet noodzakelijkerwijs een translatiesymmetrie van je kleuring. Neem voor het geval van drie dimensies een kleuring K van het vlak met slechts 1 translatierichting (die zoals we net zagen bestaat) en creeër een kleuring van de punten van $\mathbb{Z}^3$ door het vlak $z = 0$ door K te kleuren (met dus 4 kleuren), het vlak $z = 1$ door K een kwart slag gedraaid (met 4 andere kleuren) en alle andere vlakken $z = k$ door een kleuring van het vlak met twee translatierichtingen (zoals (x, y) kleuren met kleur $(x \mod 2, y \mod 2)$), om en om met de 4 kleuren van het vlak $z = 0$ voor even k en met de 4 kleuren van het vlak $z = 1$ voor oneven k. Dan zal een translatie van de kleuring die de kleuring behoudt de z-coordinaat niet mogen veranderen. Maar dan moet een translatie het vlak $z = 0$ invariant laten en het vlak $z = 1$, maar de translaties die het vlak $z = 0$ invariant laten laten niet het vlak $z = 1$ invariant en omgekeerd. Dus bestaat er geen translatie symmetrie van deze kleuring.

Voor nog hogere dimensies kunnen we met inductie op een soortgelijke manier een kleuring vinden die niet translatieinvariant is. Stel dat we een correcte kleuring K_{n-1} hebben van $\mathbb{Z}^{n-1}$ die geen translatiesymmetrie heeft. Merk op dat er ook een kleuring L_{n-1} is van $\mathbb{Z}^{n-1}$ die wel een translatiesymmetrie heeft, namelijk door elk punt te reduceren in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$. Stapel nu deze kleuringen L_{n-1} op elkaar door om en om de eerste helft van het kleurenpalet dan wel de tweede helft van de mogelijke kleuren te gebruiken en stop er één keer de kleuring K_{n-1} tussen. Dan heeft de resulterende kleuring van $\mathbb{Z}^n$ geen translatiesymmetrieën.

Koninklijke
Nederlandse
Akademie van
Wetenschappen

(a) De som van alle entries van N is gelijk aan e^*Ne, waarbij $e^* = (1, 1)$. Hiervoor geldt dat

$$e^*Ne = e^*Q^*Qe = \|Qe\|^2 > 0,$$

omdat $\|\cdot\|$ een norm is op $\mathbb{R}^2$ en omdat $Qe \neq 0$ wegens de onafhankelijkheid van de kolommen van Q. Omdat de som van de beide kolomsommen van N dus groter is dan nul, is minstens één van hen positief. En dus:

$$\beta(N) \geq 1.$$

(b) Beschouw nu de andere kolomsom van N. Als deze ook positief is, geldt de bewering omdat $\beta(N) = 2$. Als deze niet positief is, dan kan dat alleen komen doordat de entry van die kolom die niet op de diagonaal van N staat, negatief is. Immers, de diagonaal-entries van N zijn gelijk aan $\|q_1\|^2$ en $\|q_2\|^2$ en dus positief. In dat geval is dus $\alpha(N) = 1$ en $\beta(N) = 1$.

(c) Het argument bij (a) geldt niet alleen voor $k = 2$; met $e^* = (1, \ldots, 1)$ zien we dat de som van alle entries van N positief is, en er dus minstens één positieve kolomsom is.

(d) Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat de eerste kolomsom van N positief is. Schrijf nu $Q = [q_1|Q_1]$ met $n \times (k-1)$ matrix $Q_1 = [q_2, \ldots, q_n]$, dan is

$$N = Q^*Q = \left[\begin{array}{c|c} q_1^*q_1 & q_1^*Q_1 \\ \hline Q_1^*q_1 & N_1 \end{array}\right], \qquad \text{waarbij} \qquad N_1 = Q_1^*Q_1.$$

Laat q het aantal negatieve entries van $q_1^*Q_1$ zijn, dan is $\alpha(N) = \alpha(N_1) + q$. Deze q entries kunnen hooguit q positieve kolomsommen van N_1 teniet doen. Omdat de eerste kolomsom van N echter positief is, geldt dus

$$\alpha(N) + \beta(N) \geq \alpha(N_1) + \beta(N_1) + 1,$$

en een inductie-argument bewijst nu de bewering.

Het antwoord luidt bevestigend. Om zo'n f te construeren, beschouwt men het polynoom $g = \prod_{n \in V}(1 - nx)$. Het heeft gehele coëfficiënten en constante term 1, dus er is een polynoom f met gehele coëfficiënten waarvoor geldt $g = 1 - x \cdot f$. Substitueert men $1/n$ voor x, met $n \in V$, dan vindt men $1 - (1/n) \cdot f(1/n) = g(1/n) = 0$, dus $f(1/n) = n$, zoals verlangd.

YOU'D BE SURPRISED ABOUT YOUR FIRST JOB

Interesse in een stevig carrièrepad in de techniek? Op zoek naar carrièrekansen op het gebied van communicatie- en security-technologie? Dan zal Thales Nederland je verbaasd doen staan.

ABOUT US

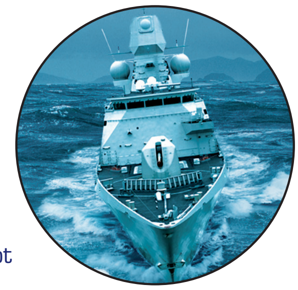
Actief in de sectoren Aerospace, Defense en Security is Thales Nederland met 2.000 medewerkers dé aanbieder van hightechbanen. Productinnovatie en snel inspelen op de nieuwste technologische mogelijkheden zijn onze drijfveren. Spraakmakende voorbeelden daarvan zijn radar-, communicatie- en command & controlsystemen voor marineschepen en communicatie-, beveiligings- en betaalsystemen voor het bedrijfsleven. Thales Nederland is onderdeel van de Thales Group met 70.000 medewerkers in ruim 50 landen en is daarmee een van Europa's grootste elektronicabedrijven.

YOUR FIRST JOB

ENGINEER

About you

Je rondt je studie Wiskunde af. Je bent een creatief denker die ook graag interdisciplinair samenwerkt met collega's in binnen en buitenland. Je wil je op opgedane kennis benutten en tegelijkertijd de vrijheid hebben diep in leading edge techniek te duiken. Je bent graag betrokken bij de hele productieketen van concept tot ontwerp en van assemblage tot de laatste testen.



About your career

Wil je je als startende wiskundige verder ontwikkelen in hightech, dan kun je bij Thales je hart ophalen. Bijvoorbeeld om als Radar Engineer te werken aan een nieuwe rondzoekradar. Het radarsignaal verwerken tot bruikbare informatie in de algoritmeketen binnen het processing cabinet.

Surprised?

Thales komt graag in contact met jou om samen jouw mogelijkheden te bekijken en je carrièrepad uit te stippelen. Ook vind je bij ons uitdagende stage- en afstudeerplaatsen. Mail ons op jobs@nl.thalesgroup.com of bel 074 - 248 37 33.

THALES

Work is smarter at Thales

smartest jobs

www.thales-nederland.nl

(a) Beschouw vijf punten A, B, C, D, E en kleur de bogen AB, AC, AD, BC, BE blauw en de andere vijf bogen rood. Dan is er geen éénkleurige cykel van lengte ≥ 4.

(b) Stel we hebben zes punten A, B, C, D, E, F met elk paar punten verbonden door een rode of een blauwe boog zonder een éénkleurige 4-cykel. Omdat er 5 bogen in A uitkomen, hebben minstens 3 daarvan dezelfde kleur. Dus mogen we aannemen dat AB, AC en AD alle blauw zijn. Dan zijn CE en DE niet beide blauw, zeg DE is rood. Verder zijn BF en CF niet beide blauw, zeg CF is rood. Tevens zijn BC en BD niet beide blauw, zeg BC is rood. Ook zijn BD en CD niet beide blauw. We onderscheiden de twee gevallen.

Stel BD is rood. Dan volgt dat CE, DF en EF blauw zijn, maar dan is de cykel $(ACEFD)$ geheel blauw.

Stel CD is rood. Dan volgt dat BE en EF blauw zijn, AF, CE en DF rood, maar dan is de cykel $(CEDF)$ geheel rood. In beide gevallen krijgen we dus een tegenspraak.

(c) Beschouw de situatie voor $m(k)+2k+2$ punten. Per definitie is er een éénkleurige cykel van lengte $\geq k$. Als de cykel lengte groter dan $k+1$ heeft, zijn we tevreden. Anders beschouwen we $m(k)+k+1$ punten die geen punt van die cykel bevatten. Ook die bevatten een éénkleurige cykel van lengte $\geq k$. Als de cykel lengte groter dan $k+1$ heeft, is de bewering bewezen. Beschouw anders m punten die geen punt van beide cykels bevatten. Daaronder is nog een éénkleurige cykel van lengte $\geq k$. We hebben nu drie disjuncte éénkleurige cykels van lengte $\geq k$, dus twee met dezelfde kleur. Beschouw deze cykels met alle bogen die beide cykels verbinden. Zeg dat de cykels rood zijn.

Als er twee rode verbindingsbogen tussen de cykels zijn met disjuncte eindpunten, dan is er een rode cykel van lengte tenminste $k+2$: loop van het ene voetpunt naar het andere langs het langste cykeldeel (lengte $\geq k/2$), steek over naar de andere cykel 1 en loop naar het andere voetpunt op die cykel langs het langste cykeldeel (lengte $\geq k/2$) en ga terug naar het beginpunt.

Als er geen twee rode verbindingsbogen tussen de cykels met disjuncte eindpunten zijn, dan is er één punt op een cykel waarvan alle rode bogen naar de andere cykel uitgaan. Als we dat punt uitzonderen en tevens een willekeurig punt op de andere cykel, dan houden we $k-1$ punten $A_1, \ldots, A_{k-1}$ op de ene cykel over en $k-1$ punten $B_1, \ldots, B_{k-1}$ op de andere cykel zó dat elke boog van een punt A_i naar een punt B_j blauw is. Dan is $(A_1B_1A_2B_2A_3B_3 \ldots A_{k-1}B_{k-1})$ een blauwe cykel van lengte $2k-2$. Omdat $2k-2 \geq k+2$ voor $k \geq 4$, hebben we de bewering bewezen.

(d) De bewering is waar voor $k = 2$ volgens b). De bewering volgt nu met volledige inductie naar k vanwege c).

OPTIVER

DERIVATIVES TRADING

Onze visie

op een glanzende loopbaan

Vanuit dit pand handelen onze Market Makers wereldwijd op vrijwel alle internationale optiebeurzen. Spannend werk, want Market Makers vormen de tegenpartij voor beleggers op de beurs. Onze Market Makers hebben diverse achtergronden en nationaliteiten. Wat zij gemeenschappelijk hebben is hun superieure rekenvaardigheid, stressbestendigheid en besluitvaardigheid. Daarnaast dragen zij veel verantwoordelijkheid. Hoe ga je daarmee om? Dat leer je tijdens de interne opleiding van 4 tot 5 weken. Daarnaast moet je een aantal eigenschappen hebben die niet aan te leren zijn: een competitieve geest, een resultaatgerichte instelling en een heel goed analytisch inzicht.

Wij zoeken Market Makers: initiatiefrijke academici met een excellent cijfermatig inzicht – relevante werkervaring is niet vereist. We verwachten een grote zelfwerkzaamheid want je blijft leren gedurende je loopbaan binnen Optiver. Je moet hier zelf veel tijd en energie in steken maar er staat ook veel tegenover: Optiver biedt je de kans om jezelf te ontplooien binnen een professionele, internationale handelsorganisatie. Heb jij een sterke drive om te winnen en ben je niet bang om verantwoordelijkheid te dragen? Ga naar **www.optiver.com** voor meer informatie over de vacatures en om te solliciteren.

Optiver handelt in derivaten, aandelen en obligaties vanuit het Amsterdamse hoofdkantoor en vanuit de filialen in Chicago en Sydney.

Optiver

DERIVATIVES TRADING

Optiver, Shemara van den Heuvel (Recruiter Trading), De Ruyterkade 112, 1011 AB Amsterdam, T 020 - 5319000

Optiver zoekt Market Makers

Acquisitie n.a.v. deze advertentie wordt niet op prijs gesteld.

Schrijf $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$. De kleuren die we gebruiken voor de punten in het netwerk, geven we weer door de getallen 0 en 1 uit $\mathbb{F}$. Het flippen is (in $\mathbb{F}$) de bewerking $x \mapsto x + 1$, immers die beeldt 0 op 1 af, en 1 op $1 + 1 = 0$.

Nummer de punten in het netwerk: $1, 2, 3, \ldots, n$. Een toestand van het netwerk is nu hetzelfde als een vector $a = (a_1, \ldots, a_n)$, waarbij $a_i = 0$ als de i-de punt wit is, en $a_i = 1$ als de i-de punt zwart is. Ook de collectie punten die we aanwijzen om samen met hun buren van kleur te gaan flippen, geven we aan door een vector uit $\mathbb{F}^n$.

Het effect van het aanwijzen van een aantal punten is dus, dat er bij de toestandsvector een zekere 'translatievector' wordt opgeteld. Met andere woorden, de hele puzzel wordt beschreven door een afbeelding, die aan ieder van alle mogelijke aanwijsvectoren, de bijbehorende translatievector toevoegt. Anders gezegd, door een afbeelding

$$L : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n.$$

Deze afbeelding L is lineair en wordt dus gegeven door een $n \times n$ matrix $A = (a_{i,j})$. De kolom bestaande uit $a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j}$ hierin, is het beeld van de j-de standaard basisvector. Per definitie heeft dit beeld op de i-de plek een 1, precies dan als $i = j$ of als i en j buren zijn. Oftewel:

$$a_{i,j} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad i = j \text{ of } i \text{ en } j \text{ zijn buren.}$$

In het bijzonder is de matrix A symmetrisch, en op de diagonaal van A staan allemaal enen.

Wij willen bewijzen, dat er een aanwijsvector a bestaat, die als effect heeft dat *elk* punt van het netwerk flipt. Dat houdt in, dat de translatievector bij deze a de vector $e := (1, 1, 1, \ldots, 1)$ (geen enkele nul) moet zijn. Kortom, we zoeken een oplossing x van $Ax = e$.

Door $v \cdot w := \sum v_i w_i$ wordt een niet-ontaarde, bilineaire vorm op $\mathbb{F}^n$ gedefinieerd. Schrijf $C^\perp := \{w \in \mathbb{F}^n;\ w \cdot v = 0\ \forall v \in C\}$. Is B het beeld van L, dan moeten we aantonen $e \in B$ oftewel $B^\perp \subset e^\perp$. Uit het feit dat A symmetrisch is volgt dat $B^\perp = \mathrm{Ker}(A)$. Het volstaat dus te bewijzen, dat $\mathrm{Ker}(A) \perp e$. Dit volgt uit het feit dat $v \cdot Av = v \cdot e$ voor elke $v \in \mathbb{F}^n$ (waarin zowel het symmetrisch zijn van A als het feit dat op de diagonaal alleen enen staan, wordt gebruikt). Dit bewijst de bewering.

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam.
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

For master- and Ph.D.-students the Stieltjes Institute organises each year a Stieltjesweek about a central theme in mathematics. Faculty members of the different universities present the lectures about such a new theme. Each Stieltjes phd-student receives a contribution of 250 euro in the printing costs of the thesis.
Each year a Stieltjes Prize is presented for the best Stieltjes thesis and the winner receives an amount of 1200 euro.

http://www.stieltjes.org/
stieltjes@math.leidenuniv.nl
+31 71 527 7042

We noteren een stochastische grootheid met verdeling X gegeven dat $X \geq m$ met X_m, en evenzo definiëren we Y_m. We moeten aantonen dat $P(X_m \geq n) \leq P(Y_m \geq n)$. Omdat voor $0 \leq x, y < 1$ geldt dat $x/(1-x) \leq y/(1-y)$ dan en slechts dan als $x \leq y$, en $1 - P(X_m \geq n) = P(X_m < n)$, is het voldoende om te laten zien dat voor $n \in \{m+1, \ldots, k\}$:

$$\frac{P(X_m \geq n)}{P(X_m < n)} \leq \frac{P(Y_m \geq n)}{P(Y_m < n)},$$

hetgeen hetzelfde is als

$$\frac{P(Y_m \geq n)}{P(X_m \geq n)} \cdot \frac{P(X_m < n)}{P(Y_m < n)} \geq 1\,. \tag{7.1}$$

Als we nu Z_1 en Z_2 schrijven voor de kans dat $X \geq m$ respectievelijk $Y \geq m$, dan wordt de linkerkant van (7.1)

$$\frac{\frac{1}{Z_2}\sum_{j=n}^{k}\binom{k}{j}q^j(1-q)^{k-j}}{\frac{1}{Z_1}\sum_{j=n}^{k}\binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}} \cdot \frac{\frac{1}{Z_1}\sum_{j=m}^{n-1}\binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}}{\frac{1}{Z_2}\sum_{j=m}^{n-1}\binom{k}{j}q^j(1-q)^{k-j}}\,. \tag{7.2}$$

Als we de notatie $\phi_p = \frac{p}{1-p}$ en $\phi_q = \frac{q}{1-q}$ invoeren, dan kunnen we (7.2) verder herschrijven als

$$\frac{q^n(1-q)^{k-n}\sum_{j=n}^{k}\binom{k}{j}\phi_q^{j-n}}{p^n(1-p)^{k-n}\sum_{j=n}^{k}\binom{k}{j}\phi_p^{j-n}} \cdot \frac{p^n(1-p)^{k-n}\sum_{j=m}^{n-1}\binom{k}{j}\phi_p^{j-n}}{q^n(1-q)^{k-n}\sum_{j=m}^{n-1}\binom{k}{j}\phi_q^{j-n}} =$$

$$= \frac{\sum_{j=n}^{k}\binom{k}{j}\phi_q^{j-n}}{\sum_{j=n}^{k}\binom{k}{j}\phi_p^{j-n}} \cdot \frac{\sum_{j=m}^{n-1}\binom{k}{j}\phi_p^{j-n}}{\sum_{j=m}^{n-1}\binom{k}{j}\phi_q^{j-n}}\,. \tag{7.3}$$

Omdat $\phi_p \leq \phi_q$, geldt ook

$$\sum_{j=n}^{k}\binom{k}{j}\phi_q^{j-n} \geq \sum_{j=n}^{k}\binom{k}{j}\phi_p^{j-n}$$

en

$$\sum_{j=m}^{n-1}\binom{k}{j}\phi_p^{j-n} \geq \sum_{j=m}^{n-1}\binom{k}{j}\phi_q^{j-n}\,.$$

Dus de expressie in (7.3) is minstens gelijk aan 1 en (7.1) is hiermee bewezen. □

ENSCHEDE

THE MASTER DEGREES

N 52°14’19” E 06°51’01”

Master Applied Mathematics

- Mathematical Physics and Computational Mechanics
- Financial Engineering
- Industrial Engineering and Operations Research
- Systems and Control

Kijk voor meer informatie en aanmelding op
graduate.utwente.nl

IMPROVE YOUR POSITION

University of Twente
Enschede - The Netherlands

We geven eerst wat tussenresultaten.

Lemma 8.1

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{U} = \{I\},$$

waarbij $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *de eenheidsmatrix is.*

Bewijs. Dit volgt eenvoudig uit de definities van $\mathbb{L}$ en $\mathbb{U}$. □

Lemma 8.2 *De verzamelingen* $\mathbb{L}$ *en* $\mathbb{U}$ *zijn gesloten ten opzichte van de matrixvermenigvuldiging, dat wil zeggen, als* $L_1, L_2 \in \mathbb{L}$ *dan* $L_1L_2 \in \mathbb{L}$ *en voor alle* $U_1, U_2 \in U$ *geldt* $U_1U_2 \in \mathbb{U}$.

Bewijs. Zij $L_1, L_2 \in \mathbb{L}$ willekeurig. Als we naar $(L_1L_2)_{i,j}$ kijken met $i < j$ dan blijkt dat dit element het product is van de i^e rij van L_1 en de j^e kolom van L_2. Omdat van de i^e rij van L_1 slechts de eerst i elementen ongelijk aan nul zijn en van de j^e kolom van L_2 de eerste $j-1$ elementen gelijk aan nul zijn, volgt uit $i \leq j-1$ dat het product nul is. Eenvoudig is in te zien dat $(L_1L_2)_{i,i} = 1$.

Voor $\mathbb{U}$ gaat het bewijs analoog. □

Lemma 8.3 *De verzamelingen* $\mathbb{L}$ *en* $\mathbb{U}$ *zijn gesloten ten opzichte van de inverse operatie dat wil zeggen, als* $L \in \mathbb{L}$ *dan* $L^{-1} \in \mathbb{L}$ *en voor alle niet-singuliere* $U \in \mathbb{U}$ *geldt* $U^{-1} \in \mathbb{U}$.

Bewijs. Het bewijs gaat uit het ongerijmde. Zij $L \in \mathbb{L}$ willekeurig. Merk op dat $\det(L) = 1$, dus L heeft een inverse matrix L^{-1}. Stel dat L^{-1} geen element is van $\mathbb{L}$, dan is er een coëfficiënt op de diagonaal van L ongelijk aan 1 of is er een coëfficiënt in de rechterbovenhoek van L ongelijk aan nul. Stel eerst dat er ten minste één kolom (j^e kolom) van L^{-1} is waar voor geldt: er is een $1 \leq i < j$ met

- $(L^{-1})_{i,j} \neq 0$,
- $(L^{-1})_{k,j} = 0, \quad 1 \leq k < i.$

Hieruit volgt $(LL^{-1})_{i,j} = (L^{-1})_{i,j} \neq 0$ hetgeen in tegenspraak is met $LL^{-1} = I$. Stel nu dat anderzijds er een $1 \leq i \leq n$ bestaat zodanig dat $(L^{-1})_{i,i} \neq 1$. Uit $(LL^{-1}) = I$ en het bovenstaande volgt $(LL^{-1})_{i,i} = (L^{-1})_{i,i} = 1$. Beide gevallen leiden tot een tegenspraak, waarmee het gestelde is bewezen.

Voor $\mathbb{U}$ gaat het bewijs analoog. □

Bewijs

Het bewijs gaat uit het ongerijmde. Stel dat er $L_1, L_2 \in \mathbb{L}$ en $U_1, U_2 \in \mathbb{U}$ zijn zodanig dat

$$L_1U_1 = A \text{ en } L_2U_2 = A.$$

Hieruit volgt dat

$$L_1U_1 = L_2U_2. \tag{8.1}$$

Omdat A niet-singulier is geldt dat U_2 ook niet singulier is. Verder geldt dat $\det(L_1) = 1$, dus L_1 is niet singulier. We vermenigvuldigen (8.1) van links met L_1^{-1} en rechts met U_2^{-1} dan volgt dat

$$U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2. \tag{8.2}$$

Omdat $\mathbb{L}$ en $\mathbb{U}$ gesloten zijn ten opzichte van de inverse operatie en de vermenigvuldiging volgt dat $L_1^{-1} L_2 \in \mathbb{L}$ en $U_1 U_2^{-1} \in \mathbb{U}$. Uit (8.2) volgt dan dat $U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$ een element is van $\mathbb{L} \cap \mathbb{U} = \{I\}$. Hieruit volgt: $L_1 = L_2$ en $U_1 = U_2$, waarmee de stelling bewezen is.

MATHEMATICAL

RESEARCH

INSTITUTE

MRI

(a) De algemene formule van Taylor luidt

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots \tag{9.1}$$

Omdat

$$\tan(x) = \sin(x)/\cos(x) \tag{9.2}$$

geldt $\tan(0) = 0/1 = 0$, en dus

$$\arctan 0 = 0. \tag{9.3}$$

Verder geldt $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$ (parate kennis). Voor $|x| < 1$ geldt de meetkundige reeks:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \tag{9.4}$$

Termsgewijze integratie geeft (1) in de opgave. Hierbij moet worden opgemerkt dat de integratieconstante nul is wegens (9.3).

(b) Uit (9.2) en de formules (parate kennis)

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b; &(9.5)\\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b &(9.6) \end{aligned}$$

volgt

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}. \tag{9.7}$$

Hieruit volgt onmiddellijk (3) in de opgave.

Stel nu $\tan a = x/y$ en $\tan b = z/w$. Invullen in (3) in de opgave geeft na enig herschikken (4) in de opgave.

(c) Kies $x = y = z = 1$ en $w = 2$; dit geeft

$$\arctan 1 = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right). \tag{9.8}$$

Realiseer je nu dat $\arctan 1 = \pi/4$; dit geeft (5) in de opgave. Vervolgens geeft $x = z = 1$, $y = 2$ en $w = 7$ vgl. (6) in de opgave. Dan geeft $x = z = 1$, $y = 3$ en $w = 7$ vgl. (7) in de opgave. Ten slotte geeft $x = 2$, $y = 11$, $z = 1$ en $w = 7$ vgl. (8) in de opgave.

(d) Vul in de opgave (8) in (7) in, dan (7) in (6), dan (6) in (5). Dit geeft (9).

(e) De combinatie van (9) en (1) in de opgave geeft numeriek

$$\pi \sim 3.14159265357. \tag{9.9}$$

Hiervan zijn de eerste 10 decimalen goed.

Realize your master plan

Universiteit Utrecht

[Faculty of Science
Mathematics]

www.math.uu.nl

Master's programmes

Mathematical Sciences

Scientific Computing

Stochastics &
Financial Mathematics

(a)

$$Ax = b, \qquad A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad x,\ b \in \mathbb{R}^n, \tag{10.1}$$

De nulruimte van de matrix A bestaat uit vectoren αc en heeft dus dimensie één. Dit betekent dat één van de rijen van A een lineaire combinatie is van de andere $n-1$ rijen. Omdat A symmetrisch is, wordt deze lineaire combinatie door de vector c bepaald. Inderdaad,

$$Ac = 0, \quad \text{oftewel} \quad c_1A^1 + c_2A^2 + \cdots + c_nA^n = 0 \in \mathbb{R}^n,$$

waar c_i elementen van c en A^i kolommen van A zijn. Hetzelfde geldt voor de rijen A_i van A (want $A = A^T$):

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n = 0 \in \mathbb{R}^n. \tag{10.2}$$

We nemen nu aan dat $c_1 \neq 0$. (Als $c_1 = 0$ dan kiezen we een ander element c_k van c, $c_k \neq 0$, en wisselen we de eerste en de k-e rijen en de eerste en de k-e kolommen van A om. Ook wisselen we de eerste en k-e elementen van b om.) Vergelijking (10.2) betekent voor stelsel (10.1) het volgende: als we de eerste vergelijking in (10.1) met c_1 vermenigvuldigen en daar de vergelijkingen $2, \ldots, n$ met de coëfficiënten $c_2, \ldots, c_n$ bij optellen, krijgen we

$$\begin{bmatrix} c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_nb_n \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{10.3}$$

waarbij het linkerlid in de eerste vergelijking nul moet zijn. Als de stelsels (10.1) en (10.3) consistent (oplosbaar) zijn, moet dus gelden dat

$$c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_nb_n = 0, \quad \text{oftewel} \quad (c, b) = 0, \tag{10.4}$$

waar (c, b) het inproduct van c en b is.

We hebben aangetoond dat (10.4) een noodzakelijke voorwaarde is voor de oplosbaarheid van stelsel (10.1). Dat deze voorwaarde ook voldoende voor de oplosbaarheid is, laten we nu zien. Stel dat conditie (10.4) geldt. We nemen nog steeds aan dat $c_1 \neq 0$ (anders wisselen we de rijen en de kolommen om zoals eerder beschreven). We vermenigvuldigen de eerste vergelijking in (10.1) met c_1 en tellen daar de vergelijkingen $2, \ldots, n$ met de coëfficiënten $c_2, \ldots, c_n$ bij op, het resultaat is een stelsel in formule (10.3) waarbij de voorwaarden (10.2) en (10.4) gelden:

$$\begin{bmatrix} \text{nul rij} \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad \text{oftewel} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \hat{A}^1 & \ldots & \hat{A}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$


KWG
Studiegroep Wiskunde met de Industrie
Nederlands Mathematisch Congres
Nieuw Archief voor Wiskunde
KWG
Boekerij en archief
Lezingenseries
Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren
KONINKLIJK WISKUNDIG GENOOTSCHAP
Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is de vakvereniging van Nederlandse wiskundigen. In 1778 opgericht onder het motto 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundevereniging.
Wiskunde-persdienst
Agenda van wiskundig Nederland
Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde
Nederlandse Onderwijs Commissie voor de Wiskunde
Wintersymposium
Najaarssymposium
Wiskunde Olympiade
Brouwermedaille
Sponsoring van wiskunde-organisaties
www.wiskgenoot.nl
Aanmelden als lid? Kijk op onze site of stuur een e-mail naar admin@wiskgenoot.nl. Studenten kunnen een jaar lang gratis lid worden.
Blijf op de hoogte van de ontwikkelingen in de wiskunde.
Ontvang het NAW, één van de mooiste Nederlandse wetenschaps-magazines.
Raak betrokken bij een netwerk van wiskundigen in onderwijs, onderzoek en bedrijfsleven.
KWG
ontwerp kitty molenaar, druk EPS
Deze poster is gemaakt met steun van de Stichting ABE.

waar $\hat{A}^j \in \mathbb{R}^{n-1}$, $j = 1, \ldots, n$ de kolommen A^j zijn van de matrix A zonder het eerste element. De eerste vergelijking in dit stelsel is $0 = 0$ en kan daarom buiten beschouwen gelaten worden:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}^1 & \ldots & \hat{A}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{10.5}$$

Dit stelsel is equivalent aan (10.1). Als $x \in \mathbb{R}^n$ een oplossing van (10.1) is dan zijn de vectoren $x + \beta c$, $\beta \in \mathbb{R}$ ook de oplossingen van (10.1), want $A(x + \beta c) = Ax + \beta Ac = Ax + 0 = b$. Stel dat één oplossing $\hat{x} = x + \beta c$ bekend is. We kiezen β zodanig dat het eerste element van x_1 van de vector x nul is:

$$0 = x_1 = \hat{x}_1 - \beta c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \hat{x}_1 / c_1.$$

Deze oplossing x (met $x_1 = 0$) zullen we nu bepalen. Substitueren van x in (10.5) levert het volgende op:

$$\underbrace{x_1}_{=0} \hat{A}^1 + x_2 \hat{A}^2 + \cdots + x_n \hat{A}^n = \begin{bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}^2 & \ldots & \hat{A}^n \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

waar $\hat{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ de matrix A is, waarbij de eerste rij en de eerste kolom ontbreken. De matrix $\hat{A}$ is niet singulier. Inderdaad, omdat de nulruimte van A dimensie één heeft, is de rank van A gelijk aan $n - 1$. Dat wil zeggen dat slechts één van de rijen van A een lineaire combinatie is van de andere $n - 1$ rijen die lineair onafhankelijk zijn. Uit (10.2) zien we dat de eerste rij een lineaire combinatie is van de andere rijen:

$$A_1 = -\frac{c_2}{c_1} A_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_1} A_n.$$

De andere $n - 1$ rijen $A_2, \ldots, A_n$ moeten dan lineair onafhankelijk zijn, anders is de rank van A minder dan $n - 1$. Vanzelfsprekend geldt de lineaire onafhankelijkheid van $A_2, \ldots, A_n$ ook voor deze rijen, waarbij sommige elementen buiten beschouwing zijn gelaten, dus ook voor de rijen $\hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_n$ van de matrix $\hat{A}$. De matrix $\hat{A}$ is dus niet singulier en heeft een inverse matrix $\hat{A}^{-1}$ zodanig dat

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \hat{A}^{-1} \begin{bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Hiermee bepalen we de elementen $x_2, \ldots, x_n$ van de oplossing x van stelsel (10.1), het eerste element van x is $x_1 = 0$.

(b) Deze uitwerking herhaalt grotendeels de oplossing van het vorige vraagstuk. We nemen nog steeds aan dat $c_1 \neq 0$ (anders wisselen we de rijen en de kolommen in A om zoals eerder beschreven). Zoals eerder is opgemerkt, kunnen we een oplossing $x \in \mathbb{R}^n$ van (10.1) zoeken, zodanig dat het eerste element x_1 van x nul is. (Inderdaad, als $x \in \mathbb{R}^n$ een oplossing is dan zijn de vectoren $x + \beta c$, $\beta \in \mathbb{R}$ ook de oplossingen van (10.1), want

$A(x + \beta c) = Ax + \beta Ac = Ax + 0 = b$. Stel dat één oplossing $\hat{x} = x + \beta c$ bekend is. We kunnen dan β kiezen, zodanig dat het eerste element van x nul is: $0 = x_1 = \hat{x}_1 - \beta c_1$, oftewel $\beta = \hat{x}_1 / c_1$.) Deze vector x (met $x_1 = 0$) zullen we nu bepalen. We substitueren x in (10.3) en maken gebruik van (10.2) en (10.4):

$$\begin{bmatrix} \text{nul rij} \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

In dit stelsel (waar $x_2, \ldots, x_n$ nog te bepalen zijn) doet de eerste kolom in de matrix er niet toe: deze wordt met $x_1 = 0$ vermenigvuldigd. Daarom kunnen we deze eerste kolom buiten beschouwen laten:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \hat{A}_2 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & \hat{A}_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

waar $\hat{A}_i$ de rijen A_i zijn van de matrix A zonder het eerste element. Dit laatste stelsel kunnen we aanpassen als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \hat{A}_2 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & \hat{A}_n & \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\tilde{b}}, \quad \text{oftewel} \quad \tilde{A}x = \tilde{b}. \tag{10.6}$$

De matrix $\tilde{A}$ is niet singulier dan en slechts dan als de matrix $\hat{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, bestaande uit de rijen $\hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_n$, niet singulier is. Deze matrix is niet singulier omdat de rijen $A_2, \ldots, A_n$ van A (en dus ook de rijen $\hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_n$ van $\hat{A}$) lineair onafhankelijk zijn. Dat dit zo is, volgt het feit dat de dimensie van de nulruimte van A één is en dus heeft A $n-1$ lineair onafhankelijke rijen (de rank van A is $n-1$). Uit (10.2) en $c_1 \neq 0$ volgt dat de eerste rij A_1 van A een lineaire combinatie is van de andere rijen $A_2, \ldots, A_n$. Deze rijen moeten dan lineair onafhankelijk zijn, anders is de rank van A minder dan $n-1$.

Het stelsel (10.6) heeft dus een niet-singuliere matrix $\tilde{A}$ en de oplossing x hiervan is een oplossing van (10.1).

11. Het ene verschil is de andere niet

A. Smeets, Universiteit Leuven

We bewijzen dat voor elk priemgetal q dat $(n+1)^p - n^p$ deelt geldt dat $q \equiv 1 \pmod{p}$. Daaruit volgt dan direct het resultaat voor willekeurige delers van $(n+1)^p - n^p$.

Zij q dus een priemgetal zodat $(n+1)^p - n^p \equiv 0 \pmod{p}$. Merk op dat n en $n+1$ niet deelbaar kunnen zijn door q. Bijgevolg hebben beide getallen een multiplicatieve inverse in $\mathbb{Z}_q^\times$. We vinden zo dat $\alpha^p \equiv 1 \pmod{q}$, waarbij $\alpha = n^{-1} \cdot (n+1)$. Bijgevolg is de orde van α in $\mathbb{Z}_q^\times$ een deler van p, en dus is de orde van α gelijk aan 1 of gelijk aan p. De orde van α kan echter niet gelijk zijn aan 1, want dan zou $n^{-1} \cdot (n+1) \equiv 1 \pmod{q}$ en dus $n \equiv n+1 \pmod{q}$. We besluiten dat de orde van α gelijk is aan p. Omdat $\alpha^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ moet $q-1$ deelbaar zijn door de orde van α, en bijgevolg is $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Deloitte zoekt talent

Deloitte zoekt technisch/bèta toptalent. Altijd. Want toptalent levert topprestaties. En dat is precies wat Deloitte wil: de beste zijn. In dienstverlening. En in knowhow. Toptalent zoeken we dus ook voor Consultancy, Enterprise Risk Services en Financial Advisory. Ambitieuze professionals. Gedreven om de top te bereiken. Erop gebrand het beste uit zichzelf te halen. Zelfstandige werkers, maar tegelijkertijd teamplayers. Toppers dus.

Consultancy

Deloitte Consultancy adviseert de top van het (inter-)nationale bedrijfsleven en veel (semi-)overheidsorganisaties over complexe strategische en organisatorische vraagstukken. We bieden waar mogelijk een totaal-oplossing: van strategie tot en met implementatie. Door de grote diversiteit aan adviesgebieden kunnen we onze expertise inzetten voor iedere stap in het proces. Ook in Technology. Voorbeelden? Denk aan strategisch advies of due diligence over het outsourcen van IT-diensten. Of de procesinrichting en implementatie van een ERP- of CRM-applicatie, zoals Oracle, SAP of Siebel. Maar ook business intelligence oplossingen voor het verkrijgen van managementinformatie uit datawarehouses. En complete maatwerkoplossingen of integratie met bestaande applicatiearchitecturen met J2EE, .NET en de nieuwste webtechnologieën.

Enterprise Risk Services

Deloitte Enterprise Risk Services ondersteunt en adviseert multinationals, Nederlandse bedrijven, de overheid en non-profitinstellingen bij het signaleren, analyseren, beoordelen en managen van risico's. Deze risico's variëren van boardroom risico's op strategisch niveau tot technische risico's op netwerkniveau. ERS-talenten kunnen bij ons zowel controlerend als adviserend aan de slag in een van de volgende competentiegroepen: Control Assurance (IT-auditing), Data Quality & Integrity (data-analyse, econometrische modelbouw en research), Risk Consulting/ Internal Audit, Security Services (met een focus op applicaties of op technische infrastructuren) of Websolutions (software specialisten).

Financial Advisory

De specialisten van Deloitte Financial Advisory Services bieden bedrijven en overheden oplossingen voor complexe financiële transacties, kapitaalmarkt-vraagstukken, vastgoed en risicobeheersing. De werkzaamheden lopen uiteen van financieel advies bij grote bedrijfsovernames tot het realiseren van financiering voor grote nieuwbouwprojecten. Maar ook IFRS, financial modelling en waardebepaling van contracten en pensioenen komen aan bod. Omdat al deze vraagstukken specifieke kennis vereisen, richten onze consultants zich op deelgebieden van financieel advies. In drie business units bundelen zij hun kennis: Transaction Advisory, Risk Advisory en Real Estate Advisory.

Hoe verschillend de functions van Deloitte ook zijn, ze hebben één ding gemeen: het talent van de mensen die er werken. Onze cliënten dagen je namelijk voortdurend uit. Eigenschappen als resultaatgerichtheid en ambitie zijn daarom onmisbaar. Net als analytisch inzicht en flexibiliteit. Herkenbaar? Dan is Deloitte jouw beste carrièremove. Ga naar www.TreasuringTalent.com om te kijken waar jouw talenten het best tot hun recht komen binnen Deloitte.

Deloitte.

Accountants. Belastingadviseurs. Consultants. Financieel Adviseurs.

TreasuringTalent.com