Leiden

LIMO

vrijdag
3 juni
2005

Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade

Uitwerkingen

www.deleidscheflesch.nl/limo

Mathematisch Instituut

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

KWG

Leids Universiteits Fonds

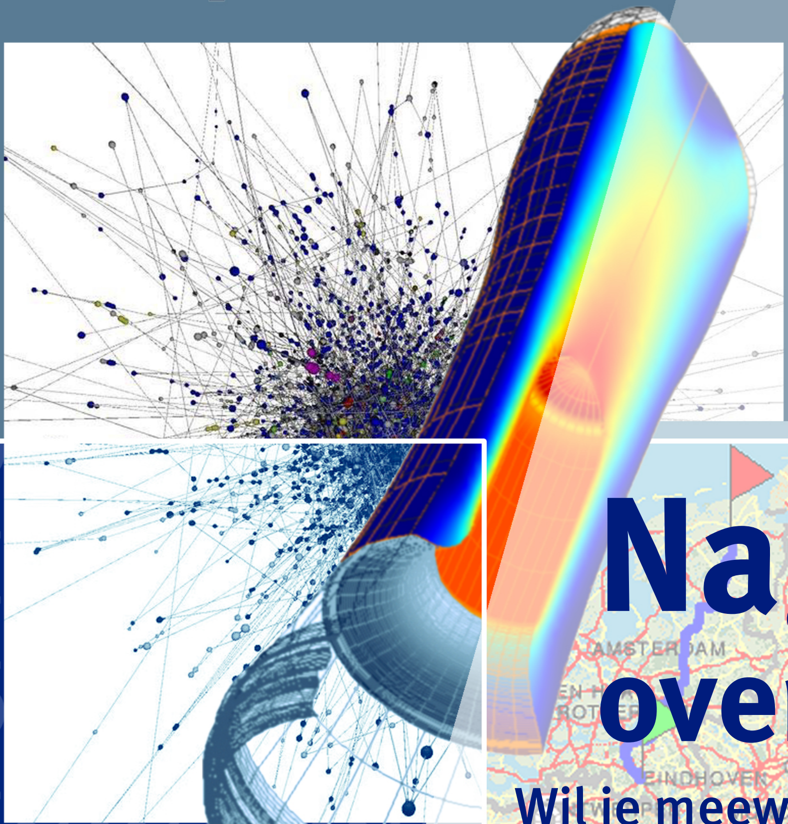
KNAW

NWO Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek

ING

Mathematical Research Institute MRI

technische universiteit eindhoven



Nagedacht over je carrière?

Wil je meewerken aan technologische vernieuwingen voor onze maatschappij, stroom dan door in de masteropleiding

Industrial and Applied Mathematics

en verdiep je in de wereld van de toepassingen en het wiskundig modelleren

Kies vanaf het begin je specialisatie:

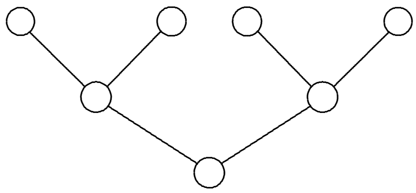
- Computational Science and Engineering
  Complexe natuurkundige en technische processen analyseren en simuleren
- Discrete Mathematics and Applications
  Van crystallografische roosters tot optimalisering van netwerken en chips, van computeralgebra tot cryptografische schema's
- Statistics, Probability, and Operations Research
  Modellering, analyse en optimalisatie van deterministische en toevallige processen

Meer info: www.win.tue.nl/iam

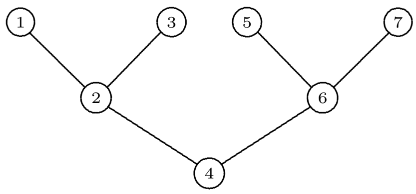
1 Er groeien bomen in onze computers

F.M. Dekking, TU Delft

Antwoord Opdracht a
Hoogte 6: de meesten van jullie zullen bedacht hebben: 1,2,3,4,5,6,7 of het rijtje 7,6,5,4,3,2,1. Maar er zijn nog minstens 62 andere goede antwoorden!
Hoogte 2: je ziet al snel dat de boom er zo uit moet zien:



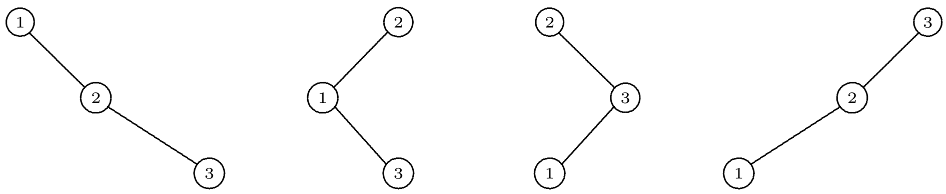
Dan bedenk je dat er 3 sleutels naar links, en 3 naar rechts moeten bij de wortel. Dat lukt precies dan als de middelste sleutel, 4, in de wortel staat. Daarna is de oplossing snel gevonden:



Een bijbehorend rijtje is 4,2,6,1,3,5,7, maar er zijn nog heel veel andere mogelijkheden, zoals 4,6,2,1,3,5,7 of 4,6,5,2,1,7,3.

Antwoord Opdracht b
Hier is het natuurlijk de bedoeling om niet te ingewikkeld te doen (zeker omdat bij **c** deze kans uitgerekend wordt). Eenvoudig is het om op te merken dat ofwel 1 ofwel n in de wortel moet staan, dus $\mathrm{P}(H_n = n-1) \leq 2/n$, hetgeen naar 0 gaat als $n \to \infty$.

Antwoord Opdracht c
Dit was de lastigste opdracht, en het meeste werk. Laten we de bomen met $H_n = n - 1$ de toppers noemen. Er zijn 4 verschillende toppers bij rijtjes van 3 sleutels:



Bij rijtjes van lengte 4 vind je er 8. Het patroon: het zijn er steeds 2 keer zoveel. Dit komt doordat de toppers bij n sleutels tot stand komen door 1 in de wortel, en dan een boom die een topper is met de sleutels $2, 3, \ldots, n$, of door de sleutel n in de wortel en dan een boom die een topper is met de sleutels $1, 2, \ldots, n-1$. Als W de waarde is van de sleutel in de wortel, dan kunnen we deze observatie opschrijven als

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(H_n = n-1) &= \mathrm{P}(H_n = n-1 \,|\, W = 1)\mathrm{P}(W = 1) + \mathrm{P}(H_n = n-1 \,|\, W = n)\mathrm{P}(W = n) \\ &= \mathrm{P}(H_{n-1} = n-2)\,\frac{1}{n} + \mathrm{P}(H_{n-1} = n-2)\,\frac{1}{n} = \frac{2}{n}\mathrm{P}(H_{n-1} = n-2)\,. \end{aligned}$$

Omdat $\mathrm{P}(H_3 = 2) = \frac{2}{3}$ volgt dat $\mathrm{P}(H_n = n-1) = 2^{n-1}/n!$

Antwoord Opdracht d

We hebben gezien dat 100% van de bomen bij 2 sleutels, en 67% van de bomen bij 3 sleutels toppers zijn, en dus "iel en nogal hoog". Maar van de bomen bij 20 sleutels zijn het er nog maar 524.288/6.564.120.420 × 100%, dat is minder dan een tienduizendste procent. Dit suggereert dat de meeste bomen bij veel sleutels "compact en nogal laag"zullen zijn. Het is niet meer dan een suggestie, omdat we bij de opdrachten niet hebben gekeken naar de 'sub-toppers'. Een argument vanuit een "hoger"standpunt voor "compact en nogal laagïs dat bij een compacte lage boom de sleutels snel gevonden zijn bij het opzoeken, en dat zal precies de reden zijn dat die bomen volgens het algorithme "Als groter, dan naar rechts, als kleiner dan naar links, tot je een vrije plek vind."geconstrueerd worden in onze computers!

2 Reële getallen

N.P. Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen

Antwoord Opdracht a
Bewijs van het lemma van Cauchy–Cantor: de doorsnede $\cap_n I_n$ van een aftelbare verzameling niet-lege, gesloten intervallen $I_n \subset \mathbb{R}$ met de eigenschap $I_{n+1} \subset I_n$ is niet leeg.

Schrijf $I_n = [x_n, y_n]$, dan geldt $x_m \leq y_n$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$. Neem nu $X = \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $Y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dan geldt dus inderdaad dat $x \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$. Volgens Dedekind is er dus $c \in \mathbb{R}$ zodanig dat $x_m \leq c \leq y_n$ voor alle $m, n \in \mathbb{N}$. Kies $m = n$: er volgt onmiddelijk dat $x_n \leq c \leq y_n$, ofwel $c \in I_n$ voor alle n. Dus per definitie $c \in \cap_n I_n$. Q.E.D.

Antwoord Opdracht b
Bewijs van de stelling van Bolzano–Weierstrass: iedere oneindige begrensde deelverzameling $X \subset \mathbb{R}$ heeft een limietpunt.

Stel X is een rij $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (zo niet, dan bevat X een dergelijke rij en is het bewijs verder hetzelfde). De aanname van begrensdheid geeft $X \subset I = [a, b]$. Deel nu I in twee-en: $I = J_1 \cup K_1$ met $J_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$ en $K_1 = [\frac{a+b}{2}, b]$. Dan bevat minstens een van de twee 'helften' een oneindige rij; stel J_1. Kies $I_2 = J_1$ en herhaal de halveringsprocedure. Dit geeft een aftelbare verzameling niet-lege, gesloten intervallen $I_n \subset \mathbb{R}$ met de eigenschap $I_{n+1} \subset I_n$. De doorsnede $\cap_n I_n$ is volgens Cauchy–Cantor niet leeg, en bestaat uit een enkel punt c (omdat de lengte van de I_n naar 0 gaat). Omdat ieder interval I_n een oneindige deelverzameling van X bevat, is dit getal c is evident een limietpunt van X. Q.E.D.

Antwoord Opdracht c
Bewijs van het volledigheidsaxioma van Dedekind uit de stelling van Bolzano–Weierstrass

Laten X en Y de begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ in het axioma van Dedekind zijn. Kies $x_1 \in X$ and $y_1 \in Y$. Bekijk $c_1 = \frac{x_1+y_1}{2}$. Dan geldt $x_1 \leq c \leq y_1$. Als c_1 voldoet aan $x \leq c_1 \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$, dan zijn we klaar. Zo niet, dan is c_1 ofwel een ondergrens voor Y ofwel een bovengrens voor X. Kies in het eerste geval $c_2 = \frac{c_1+y_1}{2}$ en in het tweede geval $c_2 = \frac{x_1+c_1}{2}$. Itereer dit proces: als c_n niet al voldoet, kies $c_{n+1} = \frac{c_n+y_1}{2}$ als c_n een ondergrens voor Y is, en $c_{n+1} = \frac{x_1+c_n}{2}$ als c_n een bovengrens voor X is. De rij $(c_1, c_2, \ldots)$ ligt tussen x_1 en y_1 en is dus begrensd. Als de rij eindig is, bevat zij de gezochte c. Zo niet, dan is de rij oneindig en heeft zij volgens Bolzano–Weierstrass een limietpunt. Dat punt is de gezochte c. Q.E.D.

3 Verpleeghuis Avondrood

R.D. Nobel, Vrije Universiteit

De noodzakelijke beslissingsvariabelen voor verpleeghuis 'Avondrood'

Antwoord/Aanwijzing Opdracht a
Introduceer de onderstaande beslissingsvariabelen

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{als taak } i \text{ voor bewoner } j \text{ wordt uitgevoerd door verzorger } k, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

$$y_k = \text{totale overwerktijd van verzorger } k \text{ per etmaal.}$$

Antwoord Opdracht b
De oplossing van onderdeel (a) kan voor een individueel personeelslid zeer ongelukkig uitpakken, omdat niets gegarandeerd is met betrekking tot de aansluiting tussen de opvolgende werkzaamheden. Het is bijvoorbeeld mogelijk dat de 'optimale' oplossing van onderdeel (a) iemand 's ochtends een half uur laat werken en dan pas weer drie uur later.

Antwoord/Aanwijzing Opdracht c
Gebruik de extra variabelen,

$$w_{dk} = \begin{cases} 1 & \text{als verzorger } k \text{ voor een } d\text{-dienst wordt ingeroosterd,} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

4 Periodieke functies

R. Tijdeman, Universiteit Leiden

Antwoord Opdracht
De uitwerking van deze opgave zal in een bijlage geleverd worden.

Mathematisch Instituut

5 Dammen

R. Tijdeman, Universiteit Leiden
Antwoord door: K.J. Batenburg, Universiteit Leiden

Antwoord Opdracht a

j

	1	0
0		1
1	0	

i

j

	0	1
1		0
0	1	

i

Als je in het linkerbord de enen en nullen verwisselt (waarbij de inhoud van de lege cellen er niet toe doet) krijg je het rechterbord. De rij-, kolom- en diagonaalsommen van beide borden zijn gelijk.

Een andere mogelijkheid is het volgende bord:

j

	1	0	
0			1
1			0
	0	1	

i

j

	0	1	
1			0
0			1
	1	0	

i

In dit geval zijn bovendien de anti-diagonaalsommen van beide borden gelijk.

Antwoord Opdracht b
Bekijk de som

$$T := \sum_{j=1}^{10} j r_j + \sum_{i=1}^{10} i k_i .$$

Onderstaande figuur geeft voor elk veld van het bord aan met welke coëfficiënt $f(i,j)$ voorkomt in T.

j

2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8

i

We zien dat deze coëfficiënt voor elke diagonaal constant is. Alle vakjes op de diagonaal van vakje (i, j) hebben coëfficiënt $i + j$. Als we hetzelfde doen voor de uitdrukking

$$U = \sum_{h=2}^{20} h d_h$$

vinden we dezelfde coëfficiënt voor elk van de $f(i, j)$ als in T en dus geldt

$$\sum_{j=1}^{10} j r_j + \sum_{i=1}^{10} i k_i = \sum_{h=2}^{20} h d_h.$$

Een andere, meer algebraïsche manier:

$$\sum_{j=1}^{10} j r_j = \sum_{j=1}^{10} j \sum_{i=1}^{10} f(i, j) = \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{10} j f(i, j) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} j f(i, j)$$

en

$$\sum_{i=1}^{10} i k_i = \sum_{i=1}^{10} i \sum_{j=1}^{10} f(i, j) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} i f(i, j),$$

dus

$$\sum_{j=1}^{10} j r_j + \sum_{i=1}^{10} i k_i = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} (i + j) f(i, j).$$

Ook geldt

$$\sum_{h=2}^{20} h d_h = \sum_{h=2}^{20} h \sum_{i+j=h} f(i, j) = \sum_{h=2}^{20} \sum_{i+j=h} h f(i, j) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} (i + j) f(i, j).$$

Hieruit volgt direct dat

$$\sum_{j=1}^{10} j r_j + \sum_{i=1}^{10} i k_i = \sum_{h=2}^{20} h d_h.$$

Het is duidelijk dat deze relatie onafhankelijk is van de in de opgave gegeven relatie.

6 Modulorekenen

F.J. Keune, Radboud Universiteit Nijmegen

Antwoord Opdracht
De natuurlijke getallen met deze eigenschap zijn de kwadraatvrije getallen.

Voor $m = 0$ (indien 0 als een natuurlijk getal wordt opgevat) bestaan de restklassen uit 1 element en is het verheffen tot een k-de macht alleen surjectief als $k = 1$.

Is $m > 0$ en niet kwadraatvrij, dan is er een priemgetal p met $p^2 \mid m$. Voor $k > 1$ is de k-de macht van restklasse van $\frac{m}{p}$ de klasse van 0. De klassen van $\frac{m}{p}$ en 0 hebben dezelfde k-de macht en is tot de macht k verheffen dus niet injectief.

Voor $m = 1$ is er maar één restklasse en dan is machtsverheffen een permutatie van die ene klasse.

Is $m > 1$ en kwadraatvrij, dan

$$m = p_1 p_2 \cdots p_r,$$

met $p_1, \ldots, p_r$ verschillende priemgetallen. Uit de Chinese reststelling volgt dat de restklassenring $\mathbb{Z}/(m)$ isomorf is met een product van eindige lichamen, nl. met

$$\mathbb{F}_{p_1} \times \mathbb{F}_{p_2} \times \cdots \times \mathbb{F}_{p_r}.$$

Kies $k > 1$ zo dat $\mathrm{ggd}(k, (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)) = 1$. Dan induceert tot de macht k verheffen een automorfisme van elk van de multiplicatieve groepen $\mathbb{F}_{p_i}^*$ en dus ook een permutatie van elk van de lichamen $\mathbb{F}_{p_i}$, want de 0-klasse wordt op de 0-klasse afgebeeld.

KNAW

7 Verdwijnpunten

F. Takens, Rijksuniversiteit Groningen

Antwoord Opdracht
We noemen de drie verdwijnpunten a, b, en c. De noodzakelijke en voldoende voorwaarde is dat de driehoek (a, b, c) uitsluitend scherpe hoeken heeft. Om dit te bewijzen gaan we proberen te positie van het punt P te construeren van waaruit geprojecteerd is. Het is duidelijk dat P niet in V kan liggen en dat de lijnen Pa, Pb, en Pc onderling loodrecht moeten zijn.

De voorwaarde dat Pa loodrecht op Pb staat betekent dat P moet liggen op de bol met middellijn (a, b). We noemen deze bol B_c; de doorsnijding van V met B_c is de cirkel C_c. Op analoge manier definiëren we B_a en B_b en ook C_a en C_b. P moet dus een punt zijn waar B_a, B_b, en B_c elkaar snijden buiten V.

Eerst de doorsnijding van B_a en B_b. Deze bevat in ieder geval het punt c. We mogen aannemen dat in c deze bollen elkaar niet raken, want anders zouden a, b, en c op een rechte lijn liggen (dan kan P niet geconstrueerd worden en is ook de 'driehoek' fout; dit mag dus buiten beschouwing gelaten worden). We gaan er dus van uit dat B_a en B_b een echt snijpunt in c hebben en dat dus B_a doorsneden met B_b een cirkel is die loodrecht op V staat, en waarvan de projectie op V het lijnsegment is dat de snijpunten van C_a en C_b met elkaar verbindt. We noemen die snijpunten van C_a en C_b p en q.

We gaan nu C_c bij het geheel betrekken. Eerst beschouwen we het geval dat p op C_c ligt. Dan is p een punt dat tot de drie bollen behoort. We bewijzen eerst dat in dat geval p gelijk moet zijn aan een van de drie punten a, b, of c. Immers als dit niet het geval zou zijn dan zouden de drie lijnen pa, pb, en pc onderling loodrecht moeten zijn - maar dat kan niet want ze liggen in het vlak V. In dit geval is (a, b, c) dus een rechthoekige driehoek. Verder is het niet moeilijk aan te tonen dat in dit geval p het enige punt is dat tot alle drie de bollen behoort. In dit geval kan P dus niet geconstrueerd worden en is ook niet aan de voorwaarde voor de driehoek (a, b, c) voldaan. Op dezelfde manier kunnen we het geval dat q op C_c ligt afhandelen. Merk op dat in dit geval elk van de bollen raakt aan de snijcirkel van de twee andere bollen.

Het is eenvoudig in te zien dat als p en q beiden buiten of beiden binnen C_c liggen er dan geen enkel punt is dat tot alle drie de bollen behoort. Dus kan P niet geconstrueerd worden. We merken op dat in dit geval de situatie (namelijk geen mogelijke positie voor P) niet verandert als we de posities van a, b, en c kleine verstoringen geven, zolang die verstoringen maar klein genoeg zijn.

Ook is het niet moeilijk in te zien dat als er precies een van de twee punten p en q binnen C_c ligt (en de andere er buiten) dan de drie bollen twee punten gemeen hebben (symmetrisch ten opzichte van V) en dat dan in die punten de bollen niet aan elkaar raken en dat ook geen enkele bol raakt aan de snijcirkel van de twee andere bollen. Ook hier verandert de situatie dus niet bij kleine verstoringen van de posities van a, b, en c, zolang die verstoringen maar klein genoeg zijn.

Nu zijn we er bijna. Bij het continu vervormen van de driehoek (a, b, c) kan de situatie alleen veranderen als een van de hoeken recht is. Het is nu dus voldoende om aan te tonen, dat onze stelling geldt voor 1 diehoek met alleen scherpe hoeken en voor 1 driehoek met een stompe hoek. De rest volgt dan met behulp van deformaties. Deze twee speciale gevallen geven natuurlijk geen problemen.

8 Eigenwaarden

M.A. Botchev, Universiteit Twente

Antwoord Opdracht
(1) Omdat A reëel is, is het spectrum van A symmetrisch t.o.v. de reële as in $\mathbb{C}$, d.w.z.

$$\lambda \in \mathrm{sp}(A) \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda} \in \mathrm{sp}(A),$$

waar $\bar{\lambda}$ complex geconjugeerde van λ is. Inderdaad, stel

$$A\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{z}, \quad 0 \neq \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n,$$

met $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$, waar $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $i^2 = -1$. Dan is $A(\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y})$.

(2) Het spectrum van A ligt op de imaginaire as. Inderdaad, stel $A\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}$, met $\|\boldsymbol{z}\|_2 = 1$, en $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$, waar $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Dan

$$\lambda = \boldsymbol{z}^* A\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y})^T A(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y} + i(-i)\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{y}.$$

Omdat A antisymmetrisch is, is $\boldsymbol{w}^T A\boldsymbol{w} = 0$, $\forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, en dus $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{y} = 0$.

(3) De eigenwaarden van A liggen dus op de imaginaire as symmetrisch t.o.v. de reële as.

Het antwoord is: als n oneven is dan moet minstens één eigenwaarde van A nul zijn.

9 Kansrekening en Stochastiek

A.W. van der Vaart en R.W.J. Meester, Vrije Universiteit

Antwoord Opdracht a
De variabele K_n is gelijk aan het aantal keer dat de zwarte bal is getrokken bij de eerste n trekkingen, en kan worden geschreven als $K_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$, voor Δ_i gedefinieerd als 1 als bij de $i$de trekking de zwarte bal wordt getrokken en als 0 anders. Bij het aanvangen van de $i$de trekking bevinden zich i gekleurde ballen en 1 zwarte bal in Hoppe's vaas. Het totale gewicht is dus $\theta + i$ en derhalve geldt $\Pr(\Delta_i = 1) = \theta/(\theta + i)$. We vinden nu

$$\mathrm{E}K_n = \mathrm{E}\sum_{i=1}^n \Delta_i = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\Delta_i = \sum_{i=1}^n \Pr(\Delta_i = 1) = \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{\theta+i}.$$

De som in deze uitdrukking kan worden ingesloten met behulp van het integraal kenmerk:

$$\int_1^n \frac{\theta}{\theta+x}\,dx \le \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{\theta+i} \le \int_0^n \frac{\theta}{\theta+x}\,dx.$$

De integralen links en rechts kunnen expliciet worden uitgerekend, waarna volgt dat

$$\frac{\theta\big(\log(\theta+n) - \log(\theta+1)\big)}{\theta\log n} \le \frac{\mathrm{E}K_n}{\theta\log n} \le \frac{\theta\big(\log(\theta+n) - \log\theta\big)}{\theta\log n}.$$

De linker en rechterkant, en dus ook de uitdrukking in het midden, van dit display convergeren naar 1 als $n \to \infty$.

Antwoord Opdracht b
We gebruiken dezelfde decompositie $K_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ als onder (a). Daar $\Delta_i^2 = \Delta_i$ geldt dat $\mathrm{E}\Delta_i^2 = \mathrm{E}\Delta_i = \theta/(\theta+i)$ en dus $\mathrm{Var}\Delta_i = \theta/(\theta+i) - (\theta/(\theta+i))^2$. Omdat de variabelen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ stochastisch onafhankelijk zijn, geldt dat

$$\mathrm{Var}K_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\Delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{\theta+i} - \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\theta}{\theta+i}\Big)^2.$$

By (a) hebben we gezien dat de eerste som aan de rechterkant van de orde $\log n$ is. De tweede som is begrensd door $\sum_{i=1}^\infty \theta^2/(\theta+i)^2 < \infty$. Delen we de hele uitdrukking door $\log n$ en nemen we de limiet voor $n \to \infty$, dan kunnen de tweede som derhalve verwaarlozen. De eerste som is precies als in (a), zodat het gevraagde volgt uit wat al in (a) is bewezen.

Antwoord Opdracht c
Voor $n = 1$ is $a_1 = 1$ de enig mogelijke waarde voor a_1 en reduceert de bewering tot $\Pr(A_{1,1} = 1) = 1$. Dit is correct.

Veronderstel dat de bewering juist is voor gegeven $n \ge 1$. We zullen de bewering bewijzen voor het geval $n + 1$.

Beschouw eerst het speciale geval $a_1 = \cdots = a_n = 0$ en $a_{n+1} = 1$. De eventualiteit $E = \{A_{1,n+1} = 0, \ldots, A_{n,n+1} = 0, A_{n+1,n+1} = 1\}$ is alleen mogelijk als $A_{1,n} = 0, \ldots, A_{n-1,n} = 0, A_{n,n} = 1$. Dat wil zeggen na n trekkingen bevinden zich n ballen van dezelfde kleur in de vaas. Volgens de inductie veronderstelling is de kans hierop $n!/\theta_{(n)}(\theta/n)$. De eventualiteit E vereist dat vervolgens in de $n+1$ste trekking een gekleurde bal wordt getrokken. De kans op de eventualiteit E is

$$\begin{aligned}&\frac{n}{\theta+n}\Pr(A_{1,n} = 0, \ldots, A_{n-1,n} = 0, A_{n,n} = 1)\\ &\qquad = \frac{n}{\theta+n}\frac{n!}{\theta_{(n)}}\frac{\theta}{n} = \frac{(n+1)!}{\theta_{(n+1)}}\frac{\theta}{n+1}.\end{aligned}$$

Dit bewijst de formule voor $n+1$ in het speciale geval.

Veronderstel nu verder dat $a_{n+1} = 0$. Laat E_0 de eventualiteit zijn dat Hoppe's $n+1$ste trekking de zwarte bal oplevert, en voor $j \geq 1$ laat E_j de eventualiteit zijn dat Hoppe als $n+1$ste bal een bal trekt van een kleur die op tijdstip n j keer voorkomt in de vaas. Gegeven $A_{1,n} = b_1, \ldots, A_{n,n} = b_n$ is de kans op E_0 gelijk aan $\theta/(\theta+n)$, en is de kans op E_j gelijk aan $jb_j/(\theta+n)$. Het laatste volgt, want $A_{n,j} = b_j$ betekent dat er b_j kleuren zijn waarvan precies j ballen voorkomen; in totaal zijn dat jb_j ballen.

We kunnen de gevraagde kans uitsplitsen als volgt:

$$\begin{aligned}&\Pr\left(A_{1,n+1} = a_1, \ldots, A_{n+1,n+1} = a_{n+1}\right)\\ &\qquad = \sum_{j=0}^{n}\Pr\left(A_{1,n+1} = a_1, \ldots, A_{n+1,n+1} = a_{n+1}, E_j\right).\end{aligned}$$

Iedere term van de som conditioneren we vervolgens op de situatie op tijdstip n:

$$\begin{aligned}&\Pr\left(A_{1,n+1} = a_1, \ldots, A_{n+1,n+1} = a_{n+1}, E_j\right)\\ &= \sum_b \Pr\left(A_{1,n+1} = a_1, \ldots, A_{n+1,n} = a_{n+1}, E_j | A_{1,n} = b_1, \ldots, A_{n,n} = b_n\right)\\ &\qquad\qquad \times \Pr\left(A_{1,n} = b_1, \ldots, A_{n,n} = b_n\right),\end{aligned}$$

waarin de som in principe over alle mogelijke vectoren $(b_1, \ldots, b_n)$ loopt. De meeste voorwaardelijke kansen aan de rechterkant zijn echter 0. Voor het geval dat $j = 0$, merken we op dat bij optreden van E_0 het aantal kleuren dat 1 keer in de vaas voorkomt met 1 toeneemt; in dat geval geldt $a_1 = b_1 + 1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n, a_{n+1} = 0$, zodat alleen $b_1 = a_1 - 1, b_2 = a_2, \ldots$ een positieve bijdrage levert. Voor het geval $j \geq 1$ merken we op dat bij optreden van E_j het aantal kleuren dat j keer in de vaas voorkomt met 1 afneemt, en het aantal kleuren dat $j+1$ keer voorkomt met 1 toeneemt; in dat geval geldt $a_j = b_j - 1$ en $a_{j+1} = b_{j+1} + 1$ en $a_i = b_i$ voor de andere indices. Dus er is weer maar 1 term ongelijk nul in de som.

Nemen we alles tesamen, dan vinden we

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(A_{1,n+1} = a_1, \ldots, A_{n+1,n+1} = a_{n+1}\right)\\
&= \Pr\left(E_0, A_{1,n} = a_1 - 1, A_{2,n} = a_2 \ldots, A_{n,n} = a_n\right)\\
&+ \sum_{j=1}^{n} \Pr\left(E_j, A_{1,n} = a_1, \ldots, A_{j,n} = a_j + 1, A_{j+1,n} = a_{j+1} - 1, \ldots A_{n,n} = a_n\right)
\end{aligned}$$

Vanwege de inductie veronderstelling kunnen we dit schrijven als

$$\frac{n!}{\theta_{(n)}} \prod_{j=1}^{n} \frac{(\theta/j)^{a_j}}{a_j!} \Big[\frac{\theta}{\theta+n}\frac{a_1}{\theta/1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{j(a_j+1)}{\theta+n}\frac{a_j}{\theta/j}\frac{\theta/(j+1)}{a_{j+1}}\Big].$$

Gebruikmakend van de formule $a_1 + \sum_{j=1}^{n}(j+1)a_{j+1} = n = 1$ kunnen we dit in de gewenste vorm schrijven.

Antwoord Opdracht d
De eventualiteit treedt op als achtereenvolgens de zwarte bal, de zwarte bal, bal 2, de zwarte bal en bal 2 worden gekozen. Schrijf deze eventualiteiten als $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Dan vinden we

$$\begin{aligned}
&\Pr(A_1 \cap \cdots \cap A_5)\\
&\quad = \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap A_2)\Pr(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\
&\qquad\qquad \times \Pr(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\\
&\quad = 1\frac{\theta}{\theta+1}\frac{1}{\theta+2}\frac{\theta}{\theta+3}\frac{2}{\theta+4} = \frac{\theta^3}{\theta_{(5)}}.
\end{aligned}$$

Antwoord Opdracht e
Door middel van de beschreven procedure levert iedere realisatie van n trekkingen uit de urn waarin k keer een zwarte bal wordt getrokken een permutatie van $\{1, 2, \ldots, n\}$ op met k cykels. Andersom kan iedere permutatie met k cykels worden gerealiseerd door in de juiste volgorde zwarte en gekleurde ballen te trekken, waarbij de nummers van de laatsten en hun volgorde uniek bepaald worden door de getallen in de permutatie. Om k cykels te verkijgen moet k keer een zwarte bal worden getrokken. Dit levert kansen van de vorm $\theta/(\theta+i)$, waarin i het gewicht in de vaas ten tijde van de trekking is. Het trekken van de juiste gekleurde bal gebeurt steeds met kans $1/(\theta + i)$. Dit levert voor iedere permutatie een product $\theta^k/\theta_{(n)}$. Om de kans op de eventualiteit $K_n = k$ te verkijgen vermenigvuldigen we dit met het aantal $S_{k,n}$ permutaties met precies k cykels.

Antwoord Opdracht f
Het vinden van het punt van maximum van de functie $\theta \mapsto f(\theta) = \theta^k/\theta_{(n)}$ is equivalent met het vinden van het punt van maximum van de functie $\theta \mapsto \log f(\theta) = k\log\theta - \sum_{i=1}^{n}\log(\theta+i-1)$. De afgeleide van deze functie is

$$\frac{k}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta+i-1}.$$

De gegeven vergelijking is derhalve equivalent met het vinden van een stationair punt voor de functie $\theta \mapsto \log f(\theta)$. Voor $\theta \uparrow \infty$ geldt dat $f(\theta) \to 0$, aangezien wordt verondersteld $k < n$. Voor $\theta \downarrow 0$ geldt eveneens dat $f(\theta) \to 0$ als $k > 1$. De functie f is continu differentieerbaar en positief op $(0, \infty)$. De functie moet derhalve een maximum waarde aannemen, en deze maximum waarde moet worden bereikt in een stationair punt. Voor $k = 1 < n$ is de functie f monotoon dalend op $[0, \infty)$. Er is dan geen oplossing van de vergelijking, tenzij we θ/θ lezen als 1, en 0 als oplossing toelaten. We besluiten dit maar te doen.

Antwoord Opdracht g

Onder (c) is bewezen dat de kansen $\Pr(A_{1,n} = a_1, \ldots, A_{n,n} = a_n)$ als functie van θ proportioneel zijn aan de functie

$$\theta \mapsto \frac{1}{\theta_{(n)}} \prod_{i=1}^{n} \theta^{a_i} = \frac{1}{\theta_{(n)}} \theta^{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Hierin is $k = \sum_{i=1}^{n} a_i$ de realizatie van K_n. Deze functie is daarom proportioneel aan de functie $\Pr(K_n = k)$ als functie van θ. Het punt van maximum is hetzelfde.

AANVULLENDE OPMERKINGEN Omdat de "aannemelijksfunctie" voor het waarnemen van $(A_{1,n}, \ldots, A_{n,n})$ gefactoriseerd kan worden in een functie van θ en K_n en een functie waarin θ niet voorkomt, is de grootheid K_n *voldoende* voor θ. Derhalve is niet alleen de meest aannemelijke schatter gebaseerd op beide typen waarnemingen gelijk, ook is *alle* informatie over θ bevat in K_n. In (f) geldt dat voor $k = n$ de aannemelijkheidsfunctie naar 1 stijgt als $\theta \uparrow \infty$. Met enige fantasie kunnen we zeggen dat de meest aannemelijke schatter in dat geval gelijk is aan ∞, en met aanvullende fantasie kunnen we zeggen dat $\theta = \infty$ in dat geval een oplossing is van de vergelijking in (f).

10 Saaie afbeeldingen

J.G.M. Donkers, TU Eindhoven

Antwoord Opdracht
The number of stable f is $(m+1)^{m-1}$.

Proof: Suppose $S = \{1, 2, ..., m\}$ and $T = S \cup \{m+1\}$
With every stable f we construct a directed graph with $m+1$ vertices, labeled $1, ..., m+1$ as follows: we put an arrow from i to $f(i)$ if $f(i) \neq i$, otherwise we put an arrow from i to $m+1$. So we get a tree with root $m+1$ and it is obvious that with every such a tree there corresponds in a unique way a stable f. Now with every directed tree with root $m+1$ we construct a map $g : \{2, 3, ..., m\} \to T$. There are $(m+1)^{m-1}$ such maps. With every g we construct a graph on $m+1$ vertices, labeled $1, ..., m+1$ as follows: put an arrow from i to $g(i)$ for all $i \in \{2, ..., m\}$. Then we get a graph with two rooted trees with root 1 and root $m+1$ and the rest of the graph consists of, let us say, k (connected) components. Each component consists of a (labeled) circuit (closed path) with at some of the vertices a tree attached. Now from all the circuits we choose the one which has the vertex with the lowest label (index). We call this vertex a_1 and the arrow starting in a_1 ends at a vertex we call b_1, then we take away arrow $a_1 b_1$. With the rest of the circuits we proceed in the same way and we get $a_2, b_2, ..., a_k, b_k$. Finally we put an arrow from 1 to b_1, from a_1 to b_2,..., from a_{k-1} to b_k and from a_k to $m+1$. In this way we get a tree with root $m+1$. Now the algorithm for getting back the graph, corresponding with the map g, starting with the rooted tree is as follows: consider the directed path from 1 to $m+1$ and call the vertex between 1 and $m+1$ with lowest label a_1, on the path from a_1 to $m+1$ call the vertex between a_1 and $m+1$ with lowest label a_2 etc. The arrow starting in 1 ends in the vertex we call b_1, the arrow starting in a_1 ends in the vertex we call b_2 etc. Then we take away the arrows $(1, b_1)$, (a_1, b_2),..., $(a_k, m+1)$ and put in the arrows (a_i, b_i) for all $i \in \{1, ..., k\}$.

Note: In fact the number of stable f is a direct consequence of Cayley's formula for the number of different labeled trees.

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

Thomas Joannes Stieltjes (1856-1895)

The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and has a research training programme for Ph.D. students. It carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with:

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

http://www.stieltjes.org/

E-mail: stieltjes@math.leidenuniv.nl